PROGRAMMA

DESTINATO A PROMUOVERE E COMPARARE

I METODI PER L'INVENZIONE GEOMETRICA

presentato

A' MATEMATICI DEL REGNO DELLE DUE SICILIE

nell' aprile del 1839.

e di nuovo riprodotto nell'ottobre seguente, con la giunta di alcune noterelle giustificanti.

DICHIARAZIONE

PER LA PRESENTE RISTAMPA DEL PROGRAMMA.

Pacis et concordiae studioso satius esset injurias vincere ferendo, quam odiosas contentiones obire ulciscendo. Verum cum patientia nostra pro ignavia habetur, silentium pro confessione criminis, et nuperam calumniam jam nova sequitur contumelia, omnino respondendum est, ne nobismetipsis deesse videamur.

Taylor - *Apologia ec. — Transact. 1719.*

Alcuni giorni dopo la pubblicazione del programma, un nostro giornale produceva innominato avviso, di non doversi tener conto del terzo quesito proposto, e così espresso: *Iscrivere in una data piramide triangolare quattro sfere, le quali si tocchino tra loro, e tocchino le facce della piramide*; perchè *più che determinato*, *ed impossibile*: la quale sola combinazione di condizioni non congruenti, bastando a mostrare l'imperizia geometrica degli autori dell'avviso, nessun ascolto fu però ad essi dato.

Presentatesi in Accademia, nella prima tornata del passato agosto, alcune risposte al programma, credei conveniente di preparare a'miei colleghi della classe matematica ciò, che poteva agevolare ad essi il giudizio a pronunziare su quelle risposte; e però lessi nella seconda tornata di tal mese alcune mie *Considerazioni su i tre quesiti proposti a premio*, che saranno quì appresso pubblicate.

Comparve allora dopo pochi giorni una risposta al programma, cioè a'primi due quesiti di esso; e pel terzo,

rivenendosi dall' erronea manifestazione a caso avventurata, si tacciava solamente per mal proposto, e però, a non perder tempo, si tralasciava, senza nè men degnarlo di correzione. E siffatta scempia produzione non mancò di chi fosse pari ad accoglierla.

Rimasti ancor questa volta senza risposta, lasciandosi al pubblico di giudicar del merito di un tal lavoro; e volendone assolutamente una coloro, che si dimostravano sì accaniti avverso un tal mio operato, che a dirla vero non credeva dovesse sì esacerbar ad essi la bile, pubblicarono in terzo luogo una impropriamente detta *prefazione* all' opuscolo già dimenticato. Ed in questa si disputava di metodi con franchezza incredibile; e non pur de' geometrici, a' quali solamente io mi limitava nel programma; ma tutti ad un tratto comprendendoli in un fascio, e di tutti dando giudizio in brevi note, e pesando nella loro rozza bilancia il merito degli antichi e de' moderni geometri, e se più valesse Newton che Archimede, e più de la Grange di quello: e quando mancasse alcuna dramma a compiere la misura di loro autorità, non mancavano d' improntarla da taluno anonimo autor moderno, che a qualche loro collega l' avesse comunicata in secreto. Ed è degno di particolare avvertenza trovarvisi spesso attribuito a sommi matematici ciò, che mai poterono pur immaginare; poichè contrario alla lor mente, e ad ogni ràgion geometrica: e non

dee far però maraviglia , se ancor a me si faccia dire nel programma, talune cose, che non solamente non le pensai giammai ; ma che anzi vi ho dimostrato un intendimento tutto diverso . Che però io non trovo miglior espediente, per mostrare al pubblico la falsità di sì impudenti asserzioni, che quello di riprodurre , senza il minimo cambiamento , il programma stesso , permettendomi solo aggiugnervi qualche nuova noterella , indicandola con lettera, e ponendole insieme in fine del medesimo : ed abbandono dopo ciò questa faccenda troppo troppo puerile all' imparziale giudizio del pubblico, pel cui rispetto solamente mi sono questa volta indotto a scrivere .

Una cosa rimane a me tutta propria , ed è di togliere a que' spontanei contraddittori al programma ogni sospetto , che io avessi voluto con questo gettar loro il guanto di una disfida ; il che non so persuadermi ancora ch'essi potessero di buona fede pensare: e m'induco piuttosto a credere , che ponessero ciò innanzi ad iscusare il loro mal animo , e' forse mi si permetta dirlo , per prendere occasione d' *inclarescere inimicitiis*. Ed in vero qual motivo poteva mai indurmi a discendere a simile bassezza ? Non sono io forse alla fine di mia lunga carriera, essi nel principio, o stazionarj a mezzo il corso ? Non tengo io forse , ed ho sempre tenuti , da che cominciai a professar le Matematiche , e sono gli anni parecchi , i primi gradi a'quali un uomo di mia classe pos-

sa aspirare, senza che mai gli avessi dimandati, e molto meno brigati? Non sono io, che ho istruiti, e promossi tanti, che ora con dignità seggono in cattedre, o in accademie, il che non possono, senza impudenza ed ingratitudine, negare coloro stessi che ora conduconsi con tanta indecenza? Non sono io che ho cercato e cerco esimermi da nuovi incarichi, e nuove commissioni, che avrei potuto ben conservare, se avessi voluto, facendo ciò tornare a loro vantaggio; e che con mio dispendio mi sono anche adoperato a far acquistare riputazione e nome a coloro, che cercano spingersi nell' ardua carriera di professar le Matematiche, pubblicando anche talvolta a mie spese qualche loro lavoro? Qual ragione sufficiente avrei dunque avuta ora, che cerco assolutamente chiudere la mia carriera, di uscire in mezzo a sfidare i miei concittadini coltivatori della stessa mia scienza, per volontà di demeritarli? Il mio unico scopo è stato ed è, il ripeto, per tentare se mai fosse possibile di far terminare tante vane dispute su' metodi in Geometria, che assai pregiudicano a' progressi delle Matematiche, ed alla buona istituzione in esse, che di giorno in giorno va presso noi decadendo. Nè vi sarà alcuno certamente tra' miei colleghi, che oserà in ciò smentirmi, osservando quanta sia ora la difficoltà di provvedere gli stabilimenti d' istruzione di buoni professori di Matematiche, mentre prima se ne abbondava; ed il vedere quanta sia la po-

chezza di conoscenze matematiche di coloro, che agli esami a' gradi accademici presso la R. U. degli studj si presentano, o ad altri per l' esercizio di professioni, che delle Matematiche abbisognino, sebbene elementarissimi, e tali al certo, che un tempo non avrebbero dato alcun pensiero a' più mediocri allievi di nostre scuole. E sono d' ordinario coloro, che da taluna delle attuali vengono pieni di orgoglio, e poveri di scienza, vantando sublime istituzione, e disprezzando l' antica senza conoscerla, che veggonsi ignorare fin le nozioni più comuni, che non v' ha giovine di prima istituzione con regolar metodo, che non conosca perfettamente. Di che credo inutile aggiugner particolari, non essendovi tra noi chi non ne convenga.

Io non ho più una scuola a me propria, come l' ebbi fino al 1812, essendone usciti non pochi, che, come ho detto, or tengono posti distinti, e che a quell' epoca dismisi, non tanto per mancarmi il tempo di bene assisterla, che per non comparire soverchiamente avido, e compromettere il mio decoro, facendo da esaminatore di coloro stessi, che aveva prima istituiti; giacchè a quell' epoca mi ritrovava in tutte le commissioni di esami per promozioni ad impieghi sì civili che militari. Lo so pur troppo, che ora da altri non pensasi a questo modo; ma io vissi in quel tempo, e però errai con gli altri miei coevi di allora: il mio errore fu però vantaggioso al pubblico;

poichè nè si usavano deferenze negli esami, nè si vedevano in conseguenza di esse le pubbliche istituzioni del Governo depravate, ed andate a male. Non avendo dunque una scuola, e volendo, per quanto a me potesse riescire, cercar di rimettere in buon cammino l' istituzione, non seppi, col mio corto intendimento, vedere altro mezzo, che quello di ricorrere al programma che proposi. Mi sarò forse ingannato, ma di buona fede, ed a mio non altrui danno; e senza offesa di alcuno de' buoni professori, de' quali non è interamente estinta presso noi la sementa, e che con me deplorano un falso sistema, che altri vogliono a forza di pompose, ed audaci parole sostenere. Nè poi era questa la prima volta che io aveva manifestate le mie idee, e tenuto lo stesso linguaggio di ora; e tra le altre noterò quella in cui pubblicai fin dal 1822, dopo averla presentata alla nostra Accademia, una dissertazione *sul metodo in Matematiche*, *sulla maniera di scrivere e compilare gli Elementi di queste scienze*, *e sull' insegnamento delle medesime*; che avrebbero pur dovuto, i poco decenti risponditori al programma, degnarla di un loro sguardo, prima di spingersi a mal dire. Si avrebbe avuto forse più ragione d' incollerirsi allora, che non dovevasi adesso, perchè ho proposte ad esercizio tre quistioni, volendo così anche profittare delle altrui ricerche, per compiere argomenti in nostra scuola utilmente, e ripetute volte trat-

tati: ma a quel tempo, il decadimento non era ancor giunto al segno di ora; ed a' buoni istitutori non si altera la bile perchè la scienza si rianimi; anzi ciò torna a loro conto ed essi il desiderano. Ed è ancora per siffatta ragione, che ho scelto per trattato della mia cattedra, nel prossimo anno di lezioni, il seguente: *Disquisitiones analyticae in methodos geometrico-algebricas*. Si vorrebbe con ciò forse imputarmi, che volessi sfidare il pubblico napoletano per intero? nò certamente il protesto, io non voglio che compiere la mia carriera istruendo, e lealmente, non imposturando, come si costuma da alcuni oggigiorno; io fo guerra al falso ed erroneo metodo d'insegnare, e cerco di sostenere e convalidare il buono, che un tempo ha prodotti in gran numero uomini distinti. Potrà avvenire che, per le mie deboli forze, non riesca; ma avrò fatto il mio debito, e meriterò se non lode, almeno di esser compatito da' miei concittadini, conoscendo, che dopo aver per tanti anni insegnato, e cercato promuovere in ogni modo l' istituzione matematica nel mio paese, per non veder poi distrutta ogni buona opera del Fergola, e de' miei colleghi, mi sono anche esposto ad esser martirizzato da coloro, che al presente fanno dell' istruzione della gioventù mercato.

Siffatta protesta, servirà anche di risposta alla troppo avvanzata dimanda, del perchè io avessi limitata la mia proposta a' soli miei concittadini. Io non era sì au-

dace da tentar tutta l' Europa: nè poi vedeva altrove quel bisogno, che scorgeva nel mio paese; poichè anzi ben mi accorgo coltivarsi da per tutto, con sobrietà e giudizio, ogni metodo d' inventare, e prodursi lavori giudiziosi, da indicar veri progressi di nostra scienza, non retrogradamento. Ma poteva darsi, ecco un' altra sciocca sfuggita de' contradditori al programma, che tra noi non si fosse trovato chi avesse potuto trattar le quistioni con l'analisi pura, alla quale non so perchè si pretende assolutamente che io miri a far torto; ed allora come giudicare della prevalenza de' metodi? Al che risponderò brevemente, col dire, che professo le Matematiche da ben quarant' anni nel mio paese, e sono necessariamente in mezzo ad esse, e non ignoro perciò tutto quello che le concerne; e quindi ben mi attendeva, da'contraddittori al programma, non una risposta d'ingiurie, che non sono se non indizio di debolezza e di mal animo, ma una risposta giudiziosa. E poi io aveva però scelte quistioni a diverse riprese trattate da sommi uomini, sul cui valore ne' metodi non cadeva alcun dubbio; e da questi più che da altri avrei tratto, e trarrò materiale ubertoso pel parallelo che mi ho proposto, e che prego ad attendere che lo esponga, e non giudicarmi alla cieca così senza conoscerlo, imitando un nostro concittadino, autore pur esso di alcune produzioni matematiche, alle quali mai alcuno rivolse lo sguardo, che cominciò una sua diatriba contro l' *Intendi-*

mento umano del celebre Giovanni Locke, protestandosi di non averlo letto; d'immaginarsi però ciò che potesse dire.

Ma alle ragioni poc' anzi accennate, e che mi avevano determinato alla scelta di queste tre quistioni, or posso con sicurezza aggiugnere, che mai altre si potevano meglio prestare allo scopo prefissomi, a cagione delle nuove escogitazioni derivate dalle ricerche in esse fatte, tendenti a rischiarare la loro natura, e quella de' problemi in generale; e ad abbattere tutti gli errori, che nella risposta al programma si sono, per imperizia geometrica, propalati. Ed i moderni geometri ed analisti, che desiderano, come me, veri progressi delle Matematiche, e vi si adoprano con infinito studio, vedranno con piacere, e sorpresa, non pur d' essersi adempito al primo quesito nel modo strettissimo dimandato; ma ancora assegnata di quel problema un' elegante geometrica soluzione, non dipartendosi dagli stessi principj dal de la Grange adoperati, per semplicemente avviare la sua, che di tanta difficoltà in costruirla era stata giustamente riputata, da' più distinti matematici. E si vedrà pure, non senza gran soddisfazione, un problema sì difficile, nel caso semplicissimo del triangolo e del cerchio, esteso alle curve coniche ed al poligono in generale, tanto con l' antica, che con la moderna analisi, senza dipartirsi dalla soluzione assegnata per quel primo ca-

so, riducendone la costruzione all' operazione geometrica la più elementare. Finalmente avvertiranno essi la proteiforme natura di tal problema, che con una singolarità tutta propria, e stranissima, ne' diversi casi, salta ad un tratto da determinato a più che determinato, e da questo ad indeterminato, senza nè men passare pel grado intermedio. E così da esso solamente potranno i risponditori al programma, con più chiarezza rilevare i loro errori manifestati sulla natura del terzo quesito.

Nè meno importanti, e grate a' geometri dovran riescire le ricerche sul secondo quesito, di cui ne appariranno due eleganti soluzioni geometriche, ed una analitica; e si vedrà da esse direttamente estesa la soluzione alle ellissi simili, oltre il gran numero di verità nuove ed importanti, alle quali le ricerche stesse hanno condotto, e che arricchiscono sempre più il vasto campo, ed immensurabile della Geometria, e perciò difficile a percorrerlo, senza un corredo di grandi conoscenze, e profondo studio ed esercizio; e quelle potranno utilmente adoperarsi in altre ricerche affini. Finalmente da' tentativi già fatti osiamo promettere ancora del terzo problema una compiuta soluzione. Ed il ripeto, io spero che tante pene che mi ho prese, e mi prendo, e le inquietudini ingiustamente, e da poca onestà prodottemi, saranno felicemente coronate, dal veder una volta terminate le vane, e

sciocche dispute sulla prevalenza de' metodi, e rimessa sul buon cammino presso noi l' istituzion matematica, che da pochi guastamestieri, per coprir loro ignoranza, si cerca depravare.

Nulla ho creduto dover rispondere all' altra insulsa proposizione, che non sia il mezzo da me adoperato conducente allo scopo prefissomi di comparare i metodi, e che da semplici problemi il progresso non si ottenga delle scienze matematiche; poichè di risposta l' una e l' altra cosa non ha bisogno. Ma pure mi piace quì di passaggio accennare, che non in altro modo pensò la R. A. delle Scienze di Parigi, per far terminare la lunga ed accanita quistione sulle leggi della comunicazione del moto; ed i programmi che propose per gli anni 1824 e 1826 contribuirono non poco all' effetto da essa desiderato: e che gli *Atti di Lipsia*, quelli *di Berlino*, le *Transazioni filosofiche*, *ec.*, e le opere de' sommi matematici, che onorarono il XVII° e XVIII° secolo, tra le quali principalmente quelle del Leibnitz, e de' fratelli Bernoulli (*),

---

(*) Gioverà qui notare il principio del *Programma* pubblicato da Giov. Bernoulli in Groninga nel 1697; dirigendolo *acutissimis qui toto orbe florent mathematicis*. » *Cum compertum habeamus, vix quicquam esse quod* » *magis excitet generosa ingenia, ad moliendum quod conducit augendis* » *scientiis, quam difficilium pariter, et utilium quaestionum propositionem;* » *quarum enodatione, tanquam singulari si qua alia via, ad nominis* » *claritatem perveniant; sibique apud posteritatem aeterna extruant monumen-* » *ta; sic me nihil gratius orbi mathematico facturum speravi, quam, si*

sono piene di quistioni proposte nel modo da me fatto; e che essi credettero così contribuire all'avanzamento delle Matematiche; e non s' ingannarono. Sicchè i contraddittori al programma non dovrebbonsi mostrare tanto annojati della mia proposta, alla quale nessuno gl' imponeva obbligo di rispondere, per dimostrarsi incivili; e potevano col loro abbandono far conoscere al pubblico di poco curarla: il quale utile consiglio accetterò ben io per me medesimo, in caso di nuova noja, che si pensasse darmi; giacchè non sono disposto a perdere in inutili polemiche quel tempo, che appena mi resta per adempiere a quanto ho promesso. Ed uniformando il fine di questa mia dichiarazione all' epigrafe che vi messa in principio, conchiuderò, come il Taylor la sua APOLOGIA: *Res ipsas exposui, peroratione non utar, harum enim taedet. Nec si quidquam regesserint contradictores, ulterius respondere necesse habebo. A contumeliis nos semel vindicare, et jus et ratio postulat; ulterius non expedit.*

» *imitando exemplum tantorum virorum* MERSENNI, PASCHALII, FERMATII,
» *praesertim recentis illius anonymi Aenigmatis Florentini* (V. Viviani),
» *aliorumque, qui idem ante me fecerunt, praestantissimis hujus aevi ana-*
» *lystis proponerem aliquod problema,* QUO, QUASI LAPIDE LYDIO, SUAS
» METHODOS EXAMINARE, *vires intendere, et, si quid invenirent, nobiscum*
» *communicare possent; ut quisque suas exinde promeritas laudes a nobis,*
» *publice id profitentibus, consequeretur.*

PROGRAMMA, ec.

Proponere problemata in publicum non caret utilitate, hac enim ratione excitantur et acuuntur ingenia, ac saepe aliquid eruitur in scientiae incrementum, quod alioquin forte absconditum mansisset.

Jo. Bernoulli *Act. Erudit. Lips. an. 1759.*

La scienza del matematico non è riposta nella pura e semplice conoscenza delle verità che la costituiscono, ma in quella de' metodi di essa, e nel saperne valutar l' energia, ed a proposito adoperarli. Nella scuola greca uno era il metodo d' inventare, e però questo fu da que' sommi geometri altamente approfondito e coltivato: e quantunque a noi meno attivo ci sembri, che forse per quelli era, non potendolo ravvisare in tutte le sue parti, e nel rapporto che queste avevano [1]; fu però esso nelle loro mani una potentis-

[1] Noi ignoriamo in qual modo essi classificassero i problemi, e ne determinassero la natura, prima d' intraprenderne la soluzione; in qual modo ne eseguissero la riduzione; come ne distinguessero i casi, e le diverse soluzioni, di che abbiamo chiaro argomento di doverne essere istruiti, anche per quelle che corrispondono alle radici or dette *negative*, come in una mia *Memoria*, che di breve presenterò alla R. Accademia delle Scienze, farò rilevare. Assai poco sappiamo del modo come riducessero le loro soluzioni a que' tanti luoghi, che si avevano appositamente preparati, tra' quali il celebratissimo delle tre, quattro, o più rette. Non ci è per-

sima leva per molte scoperte, le quali con grande esattezza condotte a fine, appariscon sempre da straordinaria chiarezza accompagnate; e molte di esse sono pe' moderni come il mezzo da convalidar le loro. La Geometria si mostra in quelle pura e senza velame; e l' animo di chi le considera rimane pienamente soddisfatto e rischiarato (*b*). Da ciò dee ripetersi, che nella scuola greca queste scienze camminassero con progressivo aumento, sebbene con quel passo misurato, ch' era proprio del metodo che adoperavasi, fino ad Apollonio; dopo il quale esse restarono per alcun tempo stazionarie, pel comun fato ch' ebbe ogni dottrina.

Ritornarono dopo secoli ad apparire tra noi italiani, e fino al secolo XVII. coltivossi da' nostri maggiori il metodo stesso degli antichi, sebbene imperfettissimo per essi; e le opere di quelli si audavano grandemente ricercando, e studiavansi, e con molto impegno traducevansi, e le perdute restituivansi; e la Geometria n' ebbe anche nuovi vantaggi, principalmente nella scuola del Galilei (*c*).

Sorta la moderna Analisi, ed applicatasi alla Geometria, i moderni acquistarono sugli antichi la prevalenza per questa parte, di posseder due metodi, da procedere all' invenzione geometrica: e con questo novello metodo più agevole ad apprendersi, più comodo, e più maneggevole, essi compensaronsi abbastanza delle risorse che

---

vennto, nè possiamo ancora indovinare bene cosa fosse quel materiale artificiosissimo de' *Porismi*, tanto utile per essi nella soluzione de' problemi più difficili, del quale ne fu autore Euclide; e ci mancano molte altre opere importanti del loro *Luogo Risoluto*: che però la conoscenza che noi abbiamo del loro metodo non può essere che assai imperfetta; e pur questa è valuta, ed è stata, presso que' moderni coltivatori di esso, un mezzo da tentare le ricerche più ardue in Geometria, e pervenire anche là dove non riesciva l' Analisi moderna (*a*).

loro mancavano dell' antico (*d*). Ma educati anche in questo, ad esso sempre rivolgevansi; e le loro ricerche, sebben fatte con l'Analisi moderna, avevano vero sapor geometrico, e ricevevano dalla Geometria luce e conferma. Per tal modo progredendo la Geometria analitica, non solamente essa avanzavasi di molto, ma l' Analisi benanche. Nè vi sarà chi possa negare, che molte ricerche importanti per la teorica delle equazioni debbano alla Geometria la loro origine, ed il loro perfezionamento. Sommi uomini apparirono a quest' epoca felicissima per le Matematiche, in ogni angolo di Europa, che così conviene indicarli, nel gran numero che se ne ebbero, e tutti di merito distintissimo: e questi non si dipartirono mai dalla conoscenza de' due metodi; che anzi esultavano allor quando, non ostante l' energia dell' Analisi moderna, lor potesse riescire di convalidare col metodo degli antichi qualche ricerca, che a quella puramente appartenesse (*f*). E di ciò molti tratti s'incontrano nelle loro opere, tra le quali, per disegnare le più prossime a noi, citerò solamente quelle del marchese de l' Hopital, de' fratelli Bernoulli, e dell' Eulero. E questo ed il Cramer portarono la moderna Geometria analitica all' apice di sua grandezza, accoppiando sempre la Geometria al metodo analitico, che come istrumento, e non come principale vi adoperavano.

I nuovi metodi sommatorj presero anche, com' è notissimo, dalla Geometria la loro origine; e per convalidarne l' esattezza, convenne dimostrare che ad essa ritornavano; sicchè senza di questa avrebbero mancato della veste di loro genuinità (*g*). La Meccanica stessa, a cominciar dal Newton principalmente, dovè alla Geometria, accoppiata sagacemente all' Analisi moderna, i suoi progressi. Opere classiche si videro venir fuora in ogni genere di ricerche matematiche, sempre accoppiando e facendo andar a paro la Geometria, e

l' Analisi ; ed ogni nazione ebbe così una numerosa scuola di matematici , de' quali continua divenne la sorgente . Finalmente questi medesimi progressi delle Matematiche , ed il ripiegar che incessantemente facevasi verso un metodo , che più agevole rendevasi nell' apprendimento , e nel maneggio , fece poco a poco aberrare dalla Geometria ; ed il metodo delle antiche scuole cominciò a coltivarsi esclusivamente da taluni ; non però scompagnandolo dalla conoscenza profonda della moderna Analisi : nel che si distinse principalmente la scuola inglese , seguendo le orme segnate ad essa dall' immortal Newton ; e nel continente quella de' Bernoulli , e l' Italiana . Nessuno certamente ardirà dire , che il Newton , l' Halley , il Cotes , il Moivre , il Taylor , i Bernoulli , i Riccati , il Frisi , e tanti altri sommi matematici , che fin oltre la metà del passato secolo produssero tanto innanzi i metodi della scienza che professavano , ignorassero la moderna Analisi , e fossero stati puri coltivatori del metodo degli antichi , coloro da cui questa riconosceva vantaggi moltissimi . Ma essa ebbe finalmente il suo corifeo nella persona dell' illustre sig. de la Grange , che dopo averla spinta per la parte istrumentale tanto in là , quanto era mai possibile , segnandovi que' limiti , che alcuno non ha potuto dopo lui sormontare ; quasi sdegnando , che in quella parte ove era di ragione secondaria alla Geometria , dovesse necessariamente dipenderne , ed a questa servire , fece tutti gli sforzi per sottrarnela , istituendo una maniera di trattare i problemi geometrici , incastonandone i dati e 'l quesito in formole generali , dalla combinazion delle quali , eliminando anche il bisogno delle figure , dovesse risultarne quell' equazione , che menasse alla risoluzione del problema .... Egli stesso però non giunse mai , per gli ardui problemi che con tal metodo ebbe tentati , ad ottener questa desiderata equazione in costruibil forma : ed il suo

gran nome fu ad altri occasione di molti sforzi, e di molta perdita di tempo in riescirvi: ed istituzioni di Geometria analitica similmente compilate si videro dopo ciò comparire *.

Noi non entriamo per ora a discettare sul merito di questa novella analisi geometrica ridotta ad arte combinatoria, e che sommette la risoluzione de' problemi al metodo delle eliminazioni, il più imperfetto dell' analisi moderna; dal che può talvolta risultare ignoto il grado, e la natura del problema che vuol risolversi, se prima non siavisi in altro modo provveduto, e che il metodo degli antichi, o il Cartesiano abbiano fatto quello riconoscere (*k*). Ma solamente fin da principio col Fergola ci dolevamo, che ciò tornasse a danno di questi due preclari metodi, cui la Geometria e le Matematiche in generale tanto dovevano. E però volendo col fatto convincerne i mo-

* Il primo esempio, che di questa nuova maniera di trattare i problemi geometrici diede il de la Grange, incontrasi nelle ricerche ch' ei presentò alla R. A. delle Scienze di Berlino *sulla piramide triangolare*, inserite nel volume per l' anno 1773, ove manifestamente afferma, poter queste interessare i geometri tanto pel metodo, che pe' risultamenti, soggiugnendo, che il loro andamento sia puramente analitico, e potersi intendere senza figure: conchiudendo in fine, che indipendentemente dall' utilità diretta che tali soluzioni potranno avere in molti rincontri, serviranno principalmente a mostrare con quanta facilità e successo il metodo algebrico possa essere impiegato in quistioni, che sembrano essere il più dipendenti dalla Geometria propriamente detta, e le meno proprie ad esser trattate col calcolo. Qual fosse però il risultamento di tali ricerche, e quanto valessero rimpetto alle stesse soluzioni proccurate con l' analisi degli antichi, può ognuno rilevarlo, dal confronto di tal memoria del de la Grange, con quella inserita nel vol. I. degli Atti della nostra Accademia delle Scienze (*h*). Posteriormente gli analisti francesi Monge e Lacroix si valsero di que' principj, per compiere in forma scientifica una nuova Geometria analitica, che fu detta, e l'è *a due e tre coordinate*.

derni coltivatori di esso, e mostrar loro la necessità di non deviare interamente da' già conosciuti metodi, ci determinammo a pubblicare alcuni *opuscoli matematici* di nostra scuola, ne' quali tratto tratto inserimmo talune ricerche, da cui i difetti, o la minor perfezione di questa moderna Geometria analitica, si potessero più di leggieri ravvisare. A tal fine ripigliando le tracce già con tanto successo segnate in nostra scuola dal Giordano, pel celebratissimo problema del Cramer anche generalizzato, ne recammo le diverse soluzioni comparandole tra loro; altra elegantissima ne aggiugnemmo del nostro collega Scorza, e molte ricerche affini pur trattammo in breve, che della considerazione dell' Eulero, e de' suoi distintissimi allievi Fuss e Lexell erano state degne; ed una delle principali Accademie di Europa, si aveva recato a sommo pregio d' inserirle ne' suoi *Atti*. E dopo tutto ciò così conchiudevamo; *Preghiamo i coltivatori della Geometria analitica a due e tre coordinate, di voler risolvere e costruire giusta i loro metodi, e per nostro gradimento i problemi generali di quelle mirabili iscrizioni, e di altre ricerche affini*. Nè però dal lungo periodo corso di ventotto anni queste nostre preghiere sono state anche in minima parte esaudite (*l*).

Più innanzi il Fergola, a nostra spinta, s' indusse a farci pubblicare le soluzioni de' problemi *de Inclinationibus* universalizzati, il quale argomento costituiva un anello della seconda parte della sua *Arte d'Inventare*, di cui già fin dal 1809 avevamo pubblicato il prospetto: e nell' introduzione ad esse, che come prove di fatto proponevamo, per porre al confronto l' efficacia de' metodi geometrico, e geometrico-analitici, più di un' opportuna riflessione facevamo al proposito, sulla insufficienza per molti riguardi della modernissima Geometria *a due e tre coordinate* (*m*).

Rimasti infruttuosi questi tentativi, quel sommo uomo, mirando più da vicino la cosa, volle istituire un parallelo di fatto tra i mezzi della modernissima Geometria analitica e 'l metodo Cartesiano, col confronto delle istituzioni di Geometria sublime trattate nell' uno e nell' altro modo; e quindi nel 1814 ci permise di pubblicare il suo *Trattato analitico* delle *Sezioni coniche*, e de' *luoghi geometrici* per esse, opera elaboratissima, compiuta nel suo genere, e piena di ricerche nuove, difficili ed importanti; e dalla quale grandissimo vantaggio ritrarranno coloro, che per la buona strada cercheranno avviarsi all' invenzione geometrica col metodo analitico de' moderni. In essa passo a passo, e nella prefazione, ed in note, e negli scolj vien dimostrato ove difetti il novissimo metodo a *due coordinate*[1]. Ma quest' opera sebbene scritta con in-

[1] Volendo qui notare alcuni solamente di tali luoghi, che ci son caduti sottocchio, percorrendo una tale opera, indicheremo nella *pref.* il §. 3., ove l'autore una per una enumera le mancanze, che ravvisansi nelle modernissime istituzioni analitiche sulle curve coniche, nè dopo ciò possiam dire che finora siesi, da'compilatori posteriori di esse, ciò corretto; ed il §.4. ove egli adombra il nuovo metodo analitico; e la seconda noterella alla pag. 5. Inoltre la nota a pag. 28, ove la conchiusione sembra riguardare un problema difficile risoluto col metodo a due coordinate, da un distinto professore napoletano educato in nostra scuola (a); e l'altra a pag. 41, nella quale di proposito compara gli effetti de' due metodi geometrico-analitici, facendo rilevare la grandissima efficacia e chiarezza del Cartesiano sul proposito. Altro difetto in cui suole inciamparsi da' coltivatori del modernissimo metodo geometrico-analitico fa osservare nella nota a pag.45. E sono pure da considerarsi le noto a pag.101, 138. Ma senza andar un per uno enunciando tali luoghi; tutto questo trattato del Fergola serve egregiamente all' oggetto, ch' egli si aveva prefisso di dimostrare, cioè, quanta prevalenza abbia il metodo geometrico-analitico sul puro analitico de' moderniori. Nè aveva pur mancato di

dicibile facilità e chiarezza, riesciva ancor troppo laboriosa, per la varietà delle ricerche tutte importanti che vi si contengono, a coloro che al presente amano di diventar presto risolvitori di problemi, già in più modi e con eleganza risoluti, contentandosi che le loro soluzioni risultino comunque, purchè possano dichiararsi autori di un opuscolo, ed anche di un libro, ed imporne al volgo; e però dobbiam credere, che costoro alcuna pena non abbiansi mai data di approfondirla, e forse che non l' abbiano nè men guardata, o che non ne conoscano l' esistenza, come per tutte le opere classiche di nostra scienza di presente avviene, le quali in breve tempo sono pur divenute viete, e condannate ad essere ornamento di libreria, ed a figurare al più nelle storie che di quella si scrivono (*p*).

Non potendo dunque riescire a convincer costoro direttamente, discorrendola con essi sul valore e sull' estensione de' metodi; poichè ciò supporrebbe la conoscenza di questi, e ci trarrebbe di quistione; nè dal modo tenuto per lo passato, più innanzi indicato, e che era un mezzo di fatto: e vedendo di giorno in giorno andar presso noi le matematiche declinando, mentre vantansi da taluni ibridi progressi; abbiam preso l' espediente di rinnovellare l' antico sistema, che ne' due passati secoli fu di valevolissimo sprone a far grandemente progredir le matematiche, cioè quello di dimandare a' nostri matematici le soluzioni di due problemi, e rinnovar loro la dimanda di altra volta [4], proponendo a chi vi adempisse, con le condizioni che verranno assegnate, il prèmio di una medaglia di oro

fare qualche avvertimento sul proposito, a vantaggio della Geometria antica nelle note a' §§. 40, 51 del lib. I. delle sue *Sezioni Coniche sintetiche* (*o*).

[4] Di questo stesso espediente si era prevalso il Viviani a' suoi tempi, per coloro che, troppo cultori del nuovo metodo Cartesiano, disprezzavano l' antica ana-

di ducati sessanta per ogni quistione, non a titolo di compenso, che nè pari alla nobiltà della scienza, e de' coltivatori di essa, nè al servigio importante che a questa si rende, si potrebbe da noi dare; ma semplicemente per offrire un contrassegno pubblico e permanente al merito di tanta operazione (*q*).

I soggetti che proponiamo a' nostri colleghi matematici napoletani, ed a' valorosi giovani che battono ora questa nobilissima carriera, sono notati nelle due seguenti pagine.

---

lisi, proponendo, *singulis litterario in Orbe degentibus hodie praeclarissimis analystis*, il celebre *enigma geometrico*, *ut hinc, qui temere contumelias in Geometriam jacere audent, silere discant, vel potius maxima cum voce exclament: Oh! unica verorum sciscitabilium scientia a Divina in hominum mente infusa, ut haec inperviis, mutabilibus, fallacibusque contemptis, aeterna ista, quae semper et unicuique sunt eadem, tantum appetat, nihilque aliud unquam magis innocuum scire perquirat.*

I.

» Esibire la corrispondente convenevole costruzione geometri-
» ca della soluzione analitica data dal de la Grange del problema di :
» *Iscrivere in un data cerchio un triangolo i cui lati passino per*
» *tre punti dati*, non dipartendosi affatto da que' medesimi princi-
» pj da quel sommo analista stabiliti, per pervenire all' equazione
» finale del medesimo; e compierne poi, con gli stessi principj, la
» dimostrazione analitica (*r*).

Se di un tale argomento occupossi nulla meno che lo stesso Eulero, il quale dubito forte della possibilità di una costruzione elegante della soluzione analitica del Lagrange; e se il suo discepolo Lexell, dopo molti e lunghi giri di analisi non potè giugnere a compierla; sarà certamente degno di gran lode quel nostro matematico, che ritentando un tale argomento, valesse a perfezionarlo nel modo da noi dimandato.

Il vantaggio che ritrarremo dalla buona riescita di questo lavoro, sarà di compiere interamente tutto quello che riguarda un problema famoso, che in nostra scuola è stato in più modi ripetute volte trattato, reso generale, ed esteso ad altre ricerche affini; e del quale non si ha per anco alcuna adequata analitica soluzione.

II.

Problema.

Iscrivere in un triangolo dato di specie di grandezza tre cerchi, i quali si tocchino tra loro, e tocchino i lati del triangolo.

Un caso semplicissimo di questo problema, quando, cioè, il triangolo dato fosse isoscele, formava parte del problema detto *trigemello* da Giacomo Bernoulli, che ne diede una soluzione analitica nel lemma II. della sua dissertazione, ove imprese a risolvere un tal problema trigemello, proposto per pubblico affisso nelle piazze di Amsterdam, mentre egli colà dimorava (*s*).

Ed appunto nel nostro problema generale, dopo essersene per incidenza occupato un distinto matematico italiano, si sono impegnati più dotti professori italiani, francesi, e tedeschi; ed ultimamente una delle maggiori accademie di Europa l' ha pure accolto ne' suoi Atti; sicchè non v' ha dubbio, che sia opera di molto merito il tentare di più elegantemente risolverlo.

La soluzione che ne dimandiamo potrà o esser fatta col metodo degli antichi, distendendone anche la corrispondente composizione geometrica, o pure con l' analisi Cartesiana; o finalmente col modernissimo metodo a due coordinate; dirigendo noi specialmente a' nostri sagaci cultori di esso questa ricerca, per saggiar la forza e l' estensione di un tal metodo. In questi due secondi casi però dovrà darsene la conveniente costruzione e dimostrazione, non dipartendosi da que' principj, che hanno servito all' analisi, e derivandole dalle formole stesse di questa (*s'*).

Un tal problema servirà di convenevole supplemento a' pro-

blemi delle ***Tazioni***, egregiamente risoluti dall' insigne nostro socio Fergola, pubblicati fin dal 1809, ed in seguito consegnati nel vol. I. degli Atti della nostra R. A. delle Scienze (*t*).

III.

PROBLEMA.

Iscrivere in una data piramide triangolare quattro sfere, le quali si tocchino tra loro, e tocchino le facce della piramide.

Un tal problema, non mai proposto, e tentato da altri, per quant' è a nostra notizia, potrà anche venir risoluto col metodo degli antichi, con l' analisi Cartesiana, o con quella a tre coordinate (*u*).

La soluzione di esso compirebbe ad un tratto le due Memorie del prof. Flauti, l' una *de' Contatti sferici*, e l' altra della *Piramide triangolare*, inserite nel vol. I. degli Atti della stessa R. A.

MODO DI PRESENTARE LE MEMORIE, E DI GIUDICARNE.

Sono assegnati per rispondere a' quesiti proposti tre mesi, a contare dal primo del maggio prossimo : che però, per tutto il dì ultimo di luglio seguente, i concorrenti al premio dovranno far pervenire in mano del segretario perpetuo della R. A. delle scienze, cav. Monticelli, le loro Memorie, distinte da un semplice motto, e senza segnarvi affatto il loro nome, che noteranno in una scheda ben suggellata, sulla quale verrà scritto lo stesso motto [5].

Nella prima tornata del venturo mese di agosto il segretario perpetuo presenterà le Memorie inviategli, chiuse come sono, al presidente dell' Accademia, il quale apertele in presenza di questa, le firmerà, pagina a pagina, insieme col segretario perpetuo, e co' tre seniori; ed indi saranno mandate alla classe matematica pel corrispondente esame, che dovrà terminarlo nello spazio di due mesi; sicchè possa renderne conto all' Accademia nella prima tornata del novembre venturo. Il segretario della classe leggerà ad essa ciascuno scritto, e potrà anche ogni socio della medesima dimandarlo, per considerarlo particolarmente; e della discussione, che avrà avuto luogo, se ne pernderà notizia nel *processo verbale* corrispondente. Il parere dovrà da ciascuno esser dato per iscritto: raccolti i pareri dal segretario della classe, questa si riunirà di nuovo, per leggerli e discuterli in comune, e stabilire il risultamento di essi come il voto della classe, che verrà registrato, per rilevarsene poi alla fine, nel caso che siensi avute più soluzioni di una stessa delle quistioni pro-

[5] La R. A. delle Scienze di Napoli si è compiaciuta di gentilmente accogliere la preghiera del proponente le quistioni, ed i premj, di far ricevere dal suo segretario perpetuo le risposte, e farne giudicare del merito dalla sua classe matematica.

poste, quella che si stimerà la più elegante, alla quale verrà aggiudicato il premio, e pubblicata nel volume degli Atti dell'Accademia, se questa lo troverà conveniente, o pure stampata separatamente. Lo stesso per quella, o quelle, che saranno state credute degne dell' *Accessit*.

Le Memorie non approvate, dopo essersi bruciate le schede che l' accompagneranno, in presenza dell' Accademia, rimarranno depositate nell' archivio di essa.

NOTE AGGIUNTE AL PROGRAMMA

NELLA PRESENTE RISTAMPA.

(a) Tra le altre perdite, che i giusti apprezzatori del loro metodo deplorano, bisogna notare tutto quel materiale da essi preparato, per la composizione de' problemi *ipersolidi*, *o lineari*, riguardante le superficie curve, e le linee in esse segnate; del che, in più luoghi delle sue *Collezioni*, offre sicuro argomento *Pappo*, tra' quali è degno di esser quì recato il seguente, dopo la prop. xxx del lib. IV.: *Antiqui geometrae datum angulum rectilineum tripartito secare volentes, ob hanc causam haesitarunt. Problematum, quae in Geometria considerantur, tria esse genera dicimus, et eorum alia quidem* plana, *alia* solida, *alia vero* linearia *appellari. Quae igitur per rectas lineas et circuli circumferentiam solvi possunt, merito dicuntur* plana, *lineae enim per quas talia problemata inveniuntur in plano ortum habent. Quaecunque vero solvuntur, assumpta in constructionem aliqua coni sectione, vel etiam pluribus, solida appellata sunt, quoniam ad constructionem solidarum figurarum superficiebus videlicet conicis uti necessarium est. Relinquitur tertium genus problematum, quod* lineare *appellatur, lineas nam aliae praeter jam dictas in constructionem assumuntur, quae va*rium et difficilem ortum habent, ex inordinatis superficiebus, et motibus implicatis factae. *Ejusmodi vero sunt etiam* lineae, quae in locis ad superficiem dictis inveniuntur, et aliae quaedam magis variae, et multae *a Demetrio Alexandrino* εν ταις γραμμικαις επιστασεσι, *hoc est in linearibus aggressionibus, et a Philone Tyaneo ex implicatione* πλεκτοειδων, *et aliarum varii generis superficierum inventae, quae multa et admirabilia simptomata continent; et nonnullae ipsarum a junioribus dignae existimatae sunt de quibus longus sermo haberetur. Una autem aliqua ex ipsis est, quae et admirabilis a Menelao appellatur.* . . . . . .
Al che potrebbesi aggiugnere tutto quello, che, relativamente allo stesso argomento, come estesamento trattato dagli antichi, ha lasciato notato Proclo, in più luoghi del suo importante comentario,

Note aggiunte.

Or io credei superfluo, nel pubblicare il programma, di riandar tutte queste cose, delle quali già mi trovava aver fatto altra volta menzione, nella prefazione alla *Geometria di Sito*, ed in diversi luoghi di essa; poichè non credeva, che il programma dovesse diventare un trattato elementare dimostrativo di ogni cosa, che vi si asserisce, nè poteva supporre, che esercitati professori tali cose assolutamente ignorassero: nel che essendo stato avvertito in contrario dalla *risposta* fatta ad esso, ove agli antichi geometri, non che non aver mai avuto metodo d' inventare, ogni conoscenza in quel genere di ricerche si è audacemente tolta, mi sono creduto nell'obbligo di brevemente ripeterne qualche cosa, alla quale aggiugnerò per conferma, ciò che dice il colebre Cramer, nella prefazione alla sua elaboratissima opera *Introduction a l'Analyse des lignes courbes algébriques*, alla cui mente dichiaro di uniformarmi, tanto più che la costui autorità, non mi sarà al certo tacciata di soverchia addizione alla Geometria antica: » Aussi (ecco com' ei dice) les courbes ont elles toujours fait un des principaux » objets des speculations des géométres. A peine la Géométrie sortoit elle de l' en» fance, qu' elle s' occupa des *Sections coniques*: bientôt après elle admira les » propriétés de la *Concoide*, de la *Cissoide*, des *Spirales* (courbes tres différents » de celles que nous designons par ce nom, et qui sont les *Hélices des anciens*) *et* » *de plusieurs autres lignes, dont le nom et la connoissance a péri* avec la plûpart des » monuments de l'ancienne Géométrie «. E tralasciando la continuazione di questo ragionamento, ove il celebre autore esattamente espone il merito dell'Analisi algebrica, noteremo ad istruzione la conseguenza che ne trae: »Il y a donc, ce semble » de l'humeur, et une sorte de caprice, à mepriser une méthode si utile, et à faire » gloire de n'employer que l' Analyse géométrique des anciens. *Celle-ci, je l'avoue* « *a sur l' Algèbre le mérite d' une evidence plus sensible*, *et d' une certaine élégance* » *qui plait infiniment*; mais il s' en faut beaucoup qu' elle soit aussi commode, et » aussi universelle. *Donnez lui donc, si vous voulez, la préference; mais ne donnez* » *point d' exclusion a l' autre methode.* Les vérités mathématiques ne sont pas si fa» ciles à trouver, qu' on doive chercher du mérite à se fermer quelcune des rou» tes qui peuvent y conduire «. Ecco come ragionava un gran geometra ed analista; e lo stesso ragionevolissimo consiglio, ch' egli in ultimo luogo dà, aveva già espresso il de Tschirnausen, introducendosi alla sua Memoria *de dimensione curvarum*, inserita negli Atti di Lipsia pel 1695, dicendo; *Cum variae in Mathesi dentur viae, ad easdem veritates inveniendas ducentes, plurimum in*

eo ponendum est studii, simplicissima ut investigetur . E così hanno sempre pensato, e detto tutt' i sommi matematici: che forse la scienza si fosse ora cambiata, per opera de' contraddittori al programma ?

E poichè la circostanza presente me ne porge opportuna l'occasione, non voglio tralasciare di render pubblica testimonianza di rispetto al già fu ottimo professor Brunacci, il quale in una sua lettera da Milano, in data del 9 febbrajo 1817 così scrivevami: » Nella mia lettera, nella quale la ringraziava della di lei bel» la opera *Geometria di Sito ec.*, che gentilmente mi aveva voluto mandare in re» galo, le prometteva di scriverle un'altra volta dopo averla letta, Eccomi a com» piere la promessa, Io ho con gran piacere gustata l'opera sua, e particolarmente » le cose sulle *plectoidi*, Oh come noi andavamo lungi dal vero, credendo nuova » interamente la dottrina di quelle curve generate dal moto di una retta nello spa» zio! Convengo con lei, che *troppo i moderni hanno abbandonate le vie battute da» gli antichi, e che utilissimo sarebbe a quelle di nuovo avvicinarsi*. Ella segua la » sua luminosa carriera ad onore della nostra Italia . . . . . . Che direbbe ora se vivesse, in sentir profferire tante sciocchezze nella *risposta al programma*, che non par mai vero, che tante se ne avessero potuto ammassare ? E lo stesso sentimento del Brunacci, che ho qui preferito, perchè comunemente giudicato più degli altri matematici Italiani de' suoi bei tempi dedito all' Analisi algebrica, di che non disconvengono gli stessi contraddittori al programma, mi hanno, in divers' incontri manifestato tutti gli altri illustri matematici italiani suoi contemporanei, che tralascio nominare, per non essere infinito. Raccogliendo dunque ciò che qui ho sparsamente accennato, conchiuderò, non aver mancato gli antichi di estesissima conoscenza sulle linee curve in generale, e sulle superficie curve; ma bensì aver mancato della facilità in classificarle, esprimendone la natura per la corrispondente equazione, dalla quale i principali sintomi di esse più agevolmente deduconsi; il che forma gran vantaggio pel metodo algebrico. Al contrario però averci essi sopravanzato nell' assegnare delle curve che consideravano tutte le proprietà geometriche, ed in adoperarle nella costruzione de' problemi ipersolidi; al che noi non siamo per anco pervenuti. Donde sempre più si dimostrerà ragionevole la conchiusione poc' anzi recata del Cramer, che ripeterò in senso inverso, dicendo: *Coltivate quanto volete i metodi algebrici, essi sono universali e comodi, e più facilmente apprendonsi e si adoprano; che però per mezzo di essi si è aperta la porta del-*

l'invenzione a parecchi spiriti, pe' quali sarebbe restata sempre chiusa senza questo soccorso. Ma non trascurate di coltivare il metodo antico, nelle cose geometriche, e di leggere e meditare le opere profonde de' greci maestri, dalle quali si raccoglie infinita scienza, da comprovare, rischiarare, e promuovere vie più la Geometria col metodo moderno.

(*b*) Credei che di questa mia proposizione non vi sarebbe stato alcuno, per poco usato che fosse nelle ricerche geometriche, con l'un metodo, o con l'altro, che non convenisse pienamente: ma poichè i contraddittori al programma nè men ne sono persuasi, il che per altro fa grande sorpresa, ho scelto a sgannarli, tra le tante autorità che potrei loro addurre (delle quali già quella del Cramer trovasi per incidenza riportata nella precedente nota), due luoghi di moderni analisti. Nel primo de' quali, ch'è dell'illustre Carnot, con profondità e penetrazione ne' due metodi, costui così ragiona: » La multiplicité des succés de » l'analyse, l'accord constant de ses résultats avec ceux qu' on pouvoit obtenir par » la synthése, *et le sceau de l' évidence apposé successivement par celle-ci à toutes* » *les découvertes de la première*, ont mis hors de doute la certitude de ces procé- » dés. Mais lors des premiers essais de cette méthode d' invention, on dut être fort » circonspect, et l'on n'osa mettre au jour les decouvertes operées par son mo- » yen, qu' apres les avoir fait passer par l' épreuve de la synthése . . . . . » On est devenu plus hardi a force de succés; et les résultats de l'analyse inspi- » rent aujourd'hui la même confiance que ceux de la plus rigoureuse synthése » (*Geom. de Position* §.14.) «. E di tutto questo, ch' è qui giudiziosamente det- » to dal Carnot, non vi sarà buono istitutore in Matematiche il quale non ne sia convinto, e che non vegga però la necessità di far progredire a passo eguale il giovine, che si avvia nelle ricerche geometriche sì con l'un metodo che con l'altro: d' onde ancora, per la buona e perfetta istituzione, fa bisogno, come il dissi altra volta, nella mia *Dissertazione sul metodo in Matematiche*, ec., di far precedere, o al meno accoppiare l'insegnamento delle *Sezioni Coniche* esposte in forma geometrica, alle stesse trattate con l' analisi moderna. Su di che ancora que' contraddittori hanno trovato a ridire; e noi volentieri condoneremo ciò alla poca sperienza nell' insegnamento, di colui che ha dato il nome alla *Risposta*.

L' altra delle autorità è presa dal Lhuilier, il quale al proposito della soluzione generale da lui recata al problema del Cramer, così esprimesi: » Je » suis éloigné de vouloir mettre en parallèle avec *la marche lumineuse des anciens*

» *le procédé suivant purement algébrique.* Je sens trop(et je le sens avec satisfa» ction) combien la Géométrie l' emporte dans ce cas sur l' Algébre. Je saisis au » contraire (avec l' auteur) cette occasion *d'engager les jeunes mathématiciens à ne » pas se livrer exclusivement aux méthodes de calcul ; mais à cultiver, au moins » dans leurs premières études, les méthodes anciennes avec plus de soin, que ne l' on » fait le plus grand nombre des calculateurs modernes* « . Dal qual luogo ben si rileva, che non siamo noi soli ad inculcare, che non debbasi tralasciare di coltivare con molto studio il metodo degli antichi, da coloro, che da' metodi analitici moderni voglion trarre vantaggio.

Ad esso aggiugneremo ancora uno squarcio di altra lettera direttaci dal Brunacci, al proposito di avergli inviato il primo fascicolo degli *Opuscoli Matematici*; il che servirà anche ad assicurare, che questa parte di essi, che comprendeva i primi tre opuscoli, era già conosciuta fin dal 1810, ch' è l'epoca della data di tal lettera, ove dicesi: » A lei rendo vivissime grazie dell' avermi mandato in » dono quel primo quinterno di *opuscoli matematici*. — Ella dice pur bene, che » trascurando la sintesi, i geometri si tarpano una delle due ali che hanno per sa» lir sublime. A me è sempre piaciuta, e duolmi di essermi troppo lascia» to trasportar dalla corrente. In questo nostro regno però si è cominciato a » rimettere in pregio la Geometria di Euclide, per l' educazione de' giovanetti. » . . . .

(c) Nella scuola del Galilei compironsi le fondamenta de' metodi sommatorj moderni, promovendo la Geometria; e così preparavasi a gradi quel grande edifizio, che ne' metodi, e nella scienza della Natura dovevasi da' geometri posteriori, e col decorrere di più di un secolo, elevare. Il Newton fu ancor egli istituito nell' antica Geometria, ed apprezzatore grandissimo de' metodi di questa; e però da esso potè darsi l' ultimo passo pel perfezionamento de' metodi sommatorj, e della Fisica sperimentale. Chi conosce la storia delle Matematiche, e sa contemplare i progressi dello spirito umano in esse, e la genesi delle scoperte fattevi, non dimanderà certamente perchè Galilei non fu Cartesio, e questi non fu Newton, conoscendo appieno, che vi bisogna una genesi successiva da un punto di tali scienze, nelle quali il caso non ha alcuna parte, ad un altro; e questa è l' opera del tempo, e non di un solo uomo. Ma coloro che avevan detto, che gli antichi potettero produrre tante sublimi verità geometriche senza alcun metodo, ed a caso pervenendovi, potevano ancor soggiu-

gnere, che se nella scuola del Galilei si fosse coltivata esclusivamente l' analisi moderna, ed abbandonata la Geometria, si sarebbe di slancio pervenuto a rapire all' immortal Newton il merito, di essere lo scopritore delle vere leggi dell' Universo: e bisogna anche supporre senza aver conosciuta e stabilita quella dell' attrazione universale, che sicuramente non fu opera del calcolo numerico. Ma la scuola del Galilei sarà sempre contenta di aver promossa la Geometria, la Meccanica, e la scienza idraulica, e di aver lasciate opere, che il volger de' secoli non ha fatto, nè farà dimenticare; del pari che gli autori di esse.

(*d*) Da questo luogo, e da altri del nostro programma, non pare che risulti la conseguenza, ch' è piaciuta trarne a' visionarj contraddittori di esso, che nel medesimo si volesse persuadere, che abbandonata l' Analisi moderna, si dovesse assolutamente coltivare l' antica. Ciò che si è sempre raccomandato in nostra scuola, e la maniera come vi si sono educati gli allievi in Matematiche, con loro grandissimo profitto, e della scienza, del che sono un esempio i contraddittori medesimi, è stata quella di accoppiar sempre la conoscenza dell' un metodo all' altro, valendosi all' uopo de' mezzi, che ciascuno poteva all' opportunità offrire; e tra gli altri argomenti di questa natura in essa dati, potremo citar; come pubblico e permanente, quello degli *Opuscoli*, e comprovarlo con tanti lavori geometrico-analitici, o assolutamente di pura analisi pubblicati in ogni tempo dal Fergola, e da' suoi discepoli, che hanno ad essi meritata la pubblica stima. E lo stesso Giordano, mentre dava del problema del Cramer generalizzato una soluzione, la quale, a giudizio del Lhuilier, *uguagliava al meno in eleganza tutto quello, ch' egli conosceva dell' analisi geometrica degli antichi*; ch' è quanto di più lusinghevole poteva dirsi per un giovinetto della sua età, non tralasciava, con estrema modestia, figlia di vero merito, e necessaria in chi vuol cominciare con profitto una carriera difficile, di confessare ingenuamente gli sforzi inutili da lui fatti, per risolvere il problema in modo puramente algebrico, e soggiugneva: » Sarebbe veramente cosa desiderabile, che » qualche perspicace algebrista si prendesse la pena di rinvenire una soluzione pu» ramente analitica di un sì elegante problema piano, che nella semplicità non la » cedesse alla sintetica già rapportata. » Ed il Lhuilier, riportando questo luogo del Giordano, così conchiudeva: *Regardant avec raison la comparaison des méthodes comme un objet, qui doit principalement fixer l' attention des mathématiciens*. E ciò valga a manifestare quanta pur fosse l' imperizia di coloro, che anche in tal

proposito hanno osato attaccare il programma come superfluo, e da rigettarsi.

(*f*) Ciò conforma il già detto dal Carnot nella nota *b*, e la poco fa recata conchiusione del Lhuilier.

(*g*) Il d' Alembert, gran promotore dell' Analisi moderna, volendo confermare le fondamenta di quella degli infiniti, si sforza provare, che questo metodo sia a dirittura uniforme e dirivato da quello de' *limiti*, del principe de' geometri Archimede; ed il Leibnitz l' aveva già preceduto in definire Archimede per *vir stupendae sagacitatis, qui fundamenta posuit inventionum fere omnium, in quibus promovendis aetas nostra gloriatur.* E ciò serva di conferma all' onesta proposizione, che gli antichi non possedevano affatto metodi d' inventare.

(*h*) Nessuno certamente, che conosca la Geometria da una parte, e che sappia ancor valutare i grandi benefizj prodotti all' analisi moderna dal sommo de la Grange, ci attribuirà a bestemmia imperdonabile quella di aver detto, che costui, principe degli analisi, non lo fosse egualmente de' geometri.

(*k*) Di ciò convengono gli stessi buoni, e non capricciosi promotori di un tal metodo; e lo dimostrano abbastanza i tentativi da essi fatti in promuoverlo. Al che comprovare, recherò qui de' tanti luoghi del Gergonne, che reputo essere stato il promotore più valente del metodo *a due coordinate*, la seguente conchiusione di sua risposta al Poncelet, inserita negli Annali vol. VIII. » De mon » côté (così egli dice) je ne négligerai aucune des occasions que, mes courts » loisirs pourront m' offrir, pour multiplier les exemples du genre d' application » de l' analyse à la géométrie, *que je cherche à faire prévaloir;* et j' ose croire, que » la diversité de nos méthodes ne faira jamais naître d' autre rivalité entre nous, » que celle du zéle pour l' avancement de la science . . . . . . je m' empresse de » declarer, que sans oser affirmer que *la géométrie analytique puisse parvenir* » *jusque là, il me parait au moins tres douteux qu' elle puisse y atteindre d' une* » *maniere facile*. E nella soluzione, che a forze riunite egli ed i suoi colleghi compilatori degli *Annali*, dopo molti stenti, riescirono a dare del problema *de' tre cerchi da iscriversi nel triangolo*, furono obbligati a confessare il loro metodo inabile a fargli pur riconoscere per molto tempo la natura del problema; e finalmente di non aver potuto pervenire che appena ad una soluzione aritmetica di esso. E gioverà pur notare qui di passaggio (giacchè questo argomento dovremo di proposito trattarlo nel parallelo de' metodi, che abbiamo più volte accennato), che il Puissant, nel suo *Recueil des propositions de Géo-*

metrie , tutte le volte che s' imbatte in equazioni a' problemi che risolve assai semplici , da poter condurre ad un agevole costruzione , non tralascia di eseguirla , dimostrando così apprezzare il merito delle ricerche geometriche : mentre poi se quelle si presentano in forma complicata , si contenta di considerarle come numeriche ; il che è manifestamente incompatibile con la mente di tutt' i geometri , e con la natura di que' problemi . Lo stesso per altri espositori del moderno metodo analitico puro . Nè dee pur tacersi , che quante volte essi possono esibir facilmente una geometrica dimostrazione di qualche verità , non tralasciano di farlo . E ciò prova che altrove si ha buon senso , e non capricci .

(l) Se ancor fosse vero , del che par che ci si faccia rimprovero , che non pur presso noi , ma eziandio al di fuori non si fosse dato ascolto alle nostre preghiere , non però dovremmo displacerci di nostra ragionevole dimanda : poichè già prima si è accennato , quanto fosse stata ben accetta a' sommi matematici la soluzione del Giordano , e dovremo ritornarvi nelle *Considerazioni ec.* E quindi possiamo con sicurezza conchiudere , che in pregio abbiasi pur dovuto poi avere quella generale dello Scorza , e le altre ricerche intorno a tal problema, da me e dal Giannattasio aggiunte negli *Opuscoli* , affini a quelle trattate dall' Eulero , e con maggior estensione dal Lhuilier (Vegg. la parte II. delle *Considerazioni, ec.*) il quale dovè essere ben contento in vedere come la Geometria antica , si fosse finalmente ben impossessata di un problema , ch' egli aveva tanto desiderato , e nel medesimo tempo diffidato , che geometricamente si risolvesse . » Quelqu' attaché que je suis à la Géométrie des anciens (ecco com' egli esprimevasi) quelque regret que j' aye de la voir trop négligée ; je n'osai, je dois l'avouer, former des espérences sur son application à ce problème pris dans cette généralité..... » Et je forme des désirs bien plus que des espérences sur une solution géométrique «. Ma pure osservisi, che noi pubblicavamo gli *Opuscoli* suddetti nel 1811 , e già tempo prima, ne avevamo sparso il primo fascicolo (*Vedi nota b*) ; che però, trovando da quell' epoca ripetutamente trattato un tal problema , e le ricerche affini ne' distinti *annali delle Matematiche*, da' diversi geometri ed analisti , e con diverso metodo , ci si potrebbe permettere il sospetto , che avessimo a ciò pur noi data una qualche spinta con quella proposta , la quale , se presso noi riescì inefficace a produrre col metodo analitico puro una nuova soluzione del problema particolare , lo fu almeno a farne conoscere riprodotta quella del Gergonne per lo stesso problema , il che non rimase senza profitto , e per nostra opera ,

a colui che si compiacque di rendere a' matematici napoletani sì importante servigio.

(*m*) Si riscontrino su tal proposito i tre opuscoli segnati co' n. IX. X. XI, nella raccolta più volte indicata.

(*n*) Veggasi la conchiusione della nota *l*.

(*o*) I contradditteri al programma si sono limitati a dire, che le ricerche dal Fergola notate come omesse nelle ordinarie istituzioni di *Analisi a due coordinate*, eran comprese nell' equazion generale alle curve coniche, e però non essere un difetto il trascurarle: e così pure altra volta fecero pubblicare, che ogni problema geometrico algebricamente risoluto doveva essere costruibile; poichè nella sua equazione era compresa la natura di esso, e quindi quanto per la costruzione bisognava. E noi non gli negheremo l'una e l'altra proposizione; ma gli soggiugneremo solamente, esser tali cose vere, come per l'appunto comprendevasi nel caos l'attuale Universo, pria che il sommo Iddio gli dasse separazione, forma, ed ordine. Noi non contendiamo di possibilità, ma di fatto, e non pur di fatto solamente, ma di facilità maggiore o minore ad ottener quelle verità dall' equazion generale: ed i contraddittori in parole, non so perchè non abbiano, ad esercizio di alcun loro allievo, fatte ricavare quelle facili conseguenze dall' equazion generale. Al che aggiugneremo, che in libri elementari non convenga tralasciar verità e problemi importanti, sul semplice riflesso di esser facili a rilevarsi: chè allora ben si potrebbe tutto tralasciare, limitando l'istituzione de' giovani a far loro conoscere quella semplice equazione generale.

(*p*) Di ciò ne presenta un chiaro argomento la risposta tutta de' contraddittori al programma.

(*q*) E qui si avverta non aver io mai detto, offrire un sì tenue premio per compenso a chi risolvesse le quistioni proposte; che ben mi sarei guardato dal profferire simile indecenza, della quale mi hanno voluto anche far regalo i contraddittori al programma.

(*r*) Sebbene mi sia proposto di non entrare affatto in esame del merito delle risposte stampate a' quesiti del programma, lasciando un tal giudizio al pubblico saggio ed imparziale; pure non posso fare a meno di accennare qui generalmente alcuna poca cosa su tale assunto. E per riguardo alla prima quistione, nella *risposta al programma*, non si è data la costruzione, nel modo dimandato; ma si è prolungata l'analisi fino a tramutare l'equazione del de la Grange, pro-

pria solamente pel cerchio, a quella che costruiscesi dal Gergonne, da potersi anche alle curve coniche estendere, nella quale i risponditori trasformano l' altra; e ciò è cosa ben facile ad ottenersi da qualunque scolarello, quando si abbiano presenti le due equazioni, cioè il luogo di partenza e quello dell' arrivo, potendo solo variarsi nel modo più o meno breve, come meglio a ciascuno può riescire. Ma non era questo ciò che chiedevasi nel programma, e che formò la difficoltà grandissima, per quella costruzione, dell' Eulero, de' suoi discepoli, dello stesso de la Grange, e di tanti altri sommi matematici, che vi si provarono. Nè tampoco si osserva nella risposta vestigio della dimandata dimostrazione: nè vale il dire ch' essa sia inutile; poichè l' era dimandata, bisognava adempiervi. Sarebbero state più ragionevolmente inutili le dimostrazioni de' problemi risoluti dagli antichi, con un' analisi breve e chiara, e senza ripieghi che ne disturbino l' andamento; e pure essi credettero necessario il compierne la composizione, recandone dopo la costruzione la dimostrazione: che *costruzione e composizione* sono cose ben diverse tra loro, essendo quella una parte di questa; che però erroneamente si è detto da essi alla pag. 6. della loro *Risposta*: *costruzione del problema, o sia composizione*.

L' essersi pur detto, che l' equazione del de la Grange fosse propria al calcolo numerico, l' è una sfuggita tutta nuova, degna di chi non sa distinguere tra costruzione, e valore; tra Geometria ed Aritmetica.

(*s*) Ecco un altro argomento per provare, che i grandi uomini ricevevano di buon grado le proposte di problemi, e se ne occupavano senza offendersene, e rispondere con ingiurie.

(*s'*) Per coloro che non saranno abbastanza pratici nelle metamorfosi algebriche, nelle quali non può negarsi un merito singolare a' risponditori al programma, avvertiremo, non esservi nulla di nuovo nell' analisi presentata per tal problema, essendo la medesima che quella de' due distinti professori di Berlino Crelle e Lechmütz, come potrà ben rilevarsi, allorchè, con questa prevenzione, si riscontri la costoro soluzione, che daremo nella parte III. delle seguenti *Considerazioni*. E ricorderemo a tal proposito la ragionevalissima massima degli analisti, che: *Analysin constituunt prae[illegible], juxta quae deinde instituitur calculus; qui non analysis est, sed instrumentum analyseos. Praeceptis semel potitis, quivis facile calculum instituit, more quisque suo; hic prolixius, ille magis concinne, prout unicuique faverit Minerva*.

Note aggiunte.

(I) A distruggere ancora, nell' animo de' dotti contraddittori, lo scrupolo di aver io detto, che *un tal problema servirebbe di convenevole supplemento a quelli delle* TAZIONI, non debbo far altro, che produr loro innanzi il seguente titolo della Memoria del Paucker, inserita negli Atti di Pietroburgo pel 1831: esso è il seguente: *Sur une question de Géométrie relative aux Tactions des cercles.* Mi lusingo che dopo ciò possa l' autorità di quest' Accademia quietarli su di un affare, che per se non ne aveva bisogno.

(II) Così ne giudicai allorchè scrissi il programma, non avendo avvertito a quello che se ne legge ripetutamente negli *Annales des Mathématiques*, che pubblicavansi in Lione da valenti geometri, enunciandovisi un tal problema nel seguente più general modo: *In una piramide qualunque, ec.* Nè credo che per tale inavvertenza si voglia essere inesorabili verso me, mentre alcuno non l' è stato col Gergonne, principal compilatore di quella raccolta pregevole, per aver ignorata l' esistenza della soluzione del Malfatti del problema precedente, inserita non in un giornale, ma negli Atti di una delle più distinte società dotte di Europa.

Di questo problema non avendo i risponditori al programma trovato vestigio di soluzione, su cui fondar al solito le loro ricerche, ricorsero da prima all' espediente di annunziarlo per *più che determinato ed impossibile* (*Giorn. dell'*Omnibus *del dì 8 maggio 1839*); era questa la migliore sfuggita per liberarsi da ogni obbligo di occuparsene. Avvertiti in seguito dalla lettura da me fatta in Accademia, nella seconda tornata di agosto, della gran diversità che passasse tra problema *più che determinato, impossibile*, e che abbisognasse di *determinazione*, ripiegarono nella *Risposta al programma* in darlo *come mal proposto*. E finalmente nella prefazione pubblicata in seguito, ora come mal proposto, ed ora come più che determinato si annunzia, e sempre conchiudendo, che non valga però lor la pena di trattarlo. Or trovandomi di già aver per quest' oggetto espressamente ragionato nella parte 2. delle seguenti *Considerazioni*, e dilucidati que' luoghi di Pappo, che per poca pratica nelle cose geometriche gli si rendevano inintelligibili, e però da essi male interpetrati, crederei abusar troppo della bontà del pubblico, ripetendo qui le cose s[illegible] che per altro a' bene istituiti sono ovvie. Solamente mi limiterò a far osservare, c[illegible]nche il problema *d' iscrivere in un cerchio dato un poligono, sicchè i lati passassero per punti dati*, l' è più che determinato in molti casi, indeterminato in altri, come si è accennato a pag. x

della *dichiarazione*; e pure chi mai, tra' tanti sommi matematici che lo hanno trattato, ne ha per queste insussistenti ragioni rigettata la ricerca; le quali presso a poco toglierebbero a dirittura a' geometri il piacere di trattar problemi, ed a' contraddittori la pena di occuparsene, quando gli trovassero già prima da altri risoluti. Ed a chiunque di animo non prevenuto, e di scienza più regolare avrebbe fatto pur qualche peso, il trovare ripetutamente proposto lo stesso problema da distinti matematici, per lo spazio di più di venti anni, senza che mai alcuno pur per ombra si fosse al loro strano ripiego appellato.